GUÍA PARA EL EXAMEN DE SEÑALES Y SISTEMAS

Problema 1. Exprese la señal continua por tramos de la Figura 1.1 como una suma pesada de funciones escalón unitario.

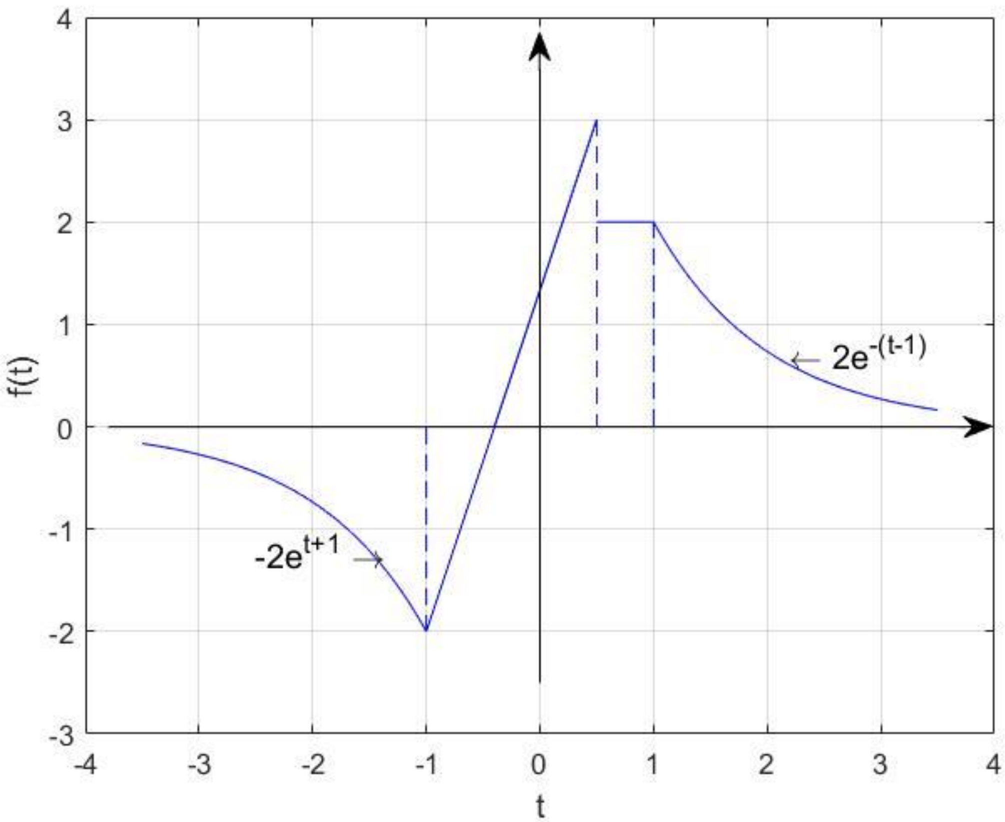

Figura 1.1. Señal continua por tramos, tiempo en segundos.

Solución: Observe que la función continua por tramos de la figura está compuesta por cuatro funciones continuas, dos funciones exponenciales y dos líneas rectas. Por otra parte, la función escalón unitario está definida de la siguiente forma:

$$u(t) = \begin{cases} 1\ ; t > 0 \\ 0\ ; t < 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

La gráfica de la función $u(t)$ se muestra en la Figura 1.2.

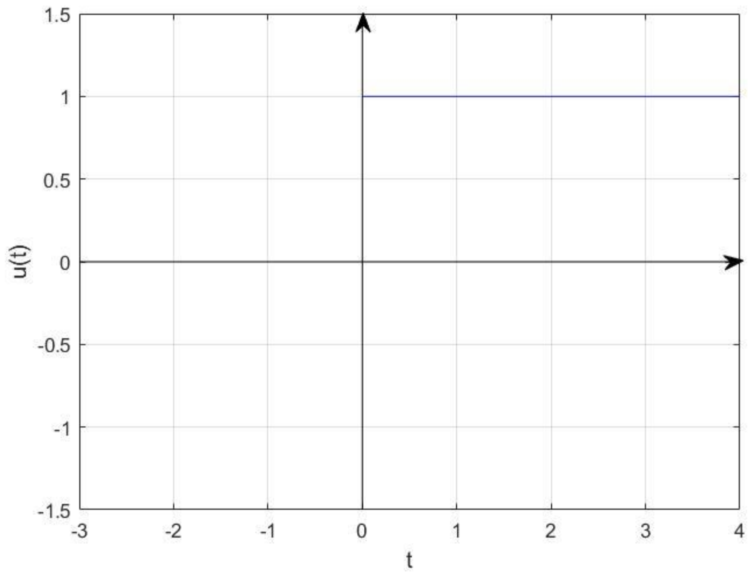

Figura 1.2. Función escalón unitario, tiempo en segundos.

Examinemos ahora las siguientes funciones: $g_1(t) = u(t-3)$; $g_2(t) = u(-t-2)$; $g_3(t) = u(t+2) - u(t-3)$. La primera representa a una función escalón unitario retardada en 3 unidades, su gráfica se presenta en la Figura 1.3.

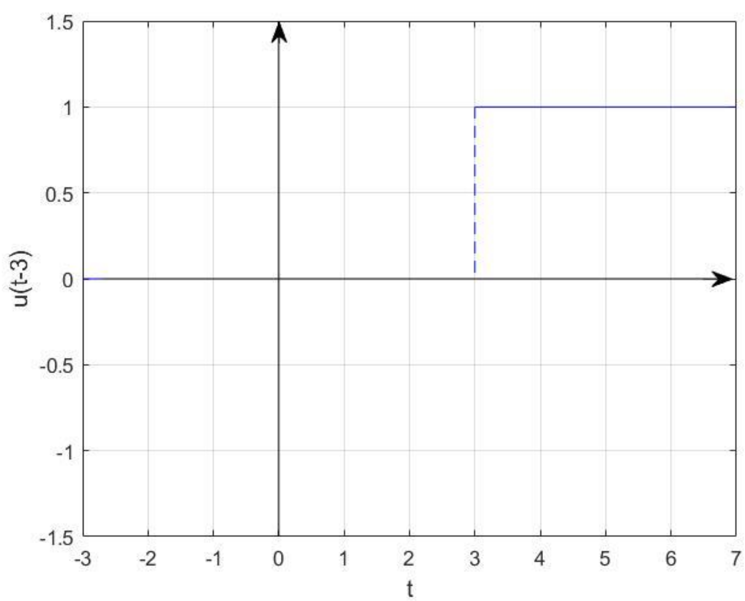

Figura 1.3. Gráfica de la función $g_1(t) = u(t-3)$, tiempo en segundos.

La segunda, $g_2(t)$, representa un escalón invertido y adelantado en el tiempo, su gráfica se presenta en la Figura 1.4.

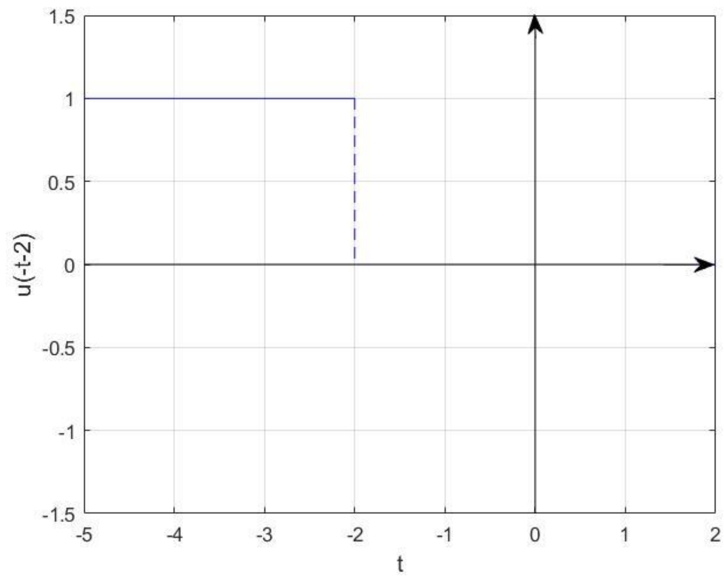

Figura 1.4. Gráfica de la función $g_2(t) = u(-t-2)$, tiempo en segundos.

La tercera, $g_3(t)$, representa la diferencia de dos escalones unitarios, uno adelantado y otro retrasado en el tiempo, su gráfica se presenta en la Figura 1.5.

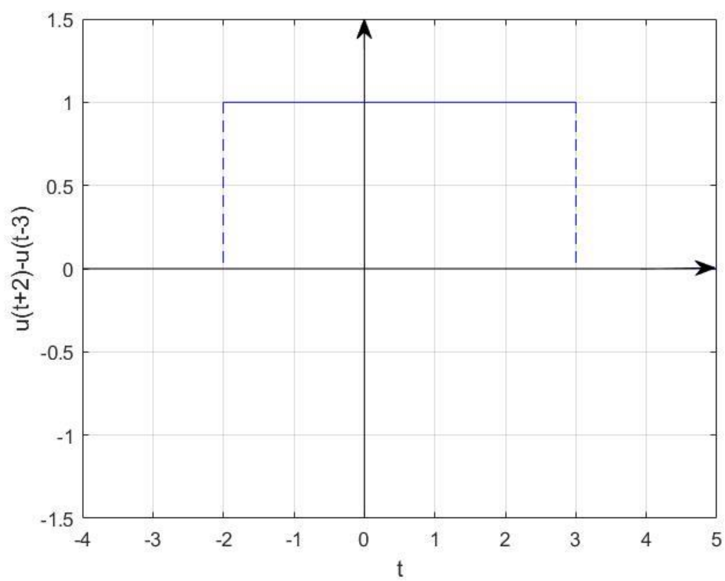

Figura 1.5. Gráfica de la función $g_3(t) = u(t+2) - u(t-3)$, tiempo en segundos.

Note que la diferencia de escalones unitarios da como resultado una ventana en el tiempo, es decir, una función que es igual a cero en casi todas partes, excepto en un intervalo de tiempo en el que su valor es igual a la unidad.

Ahora estamos en posibilidad de dar solución al problema planteado. Comencemos por el primer tramo de la función $f(t)$ de la Figura 1.1, al cual denominaremos $f_1(t)$. Este tramo puede expresarse mediante el producto de la función exponencial y un escalón unitario invertido y adelantado en el tiempo como el de la Figura 1.4, así

$$f_1(t) = -2e^{t+1}u(-t-1). \tag{1.2}$$

El segundo tramo, $f_2(t)$, corresponde a una línea recta sobre la ventana de tiempo que se extiende desde $t = -1$ hasta $t = 1/2$. Por lo tanto, esta función puede expresarse como el producto de la ecuación de la línea recta y la diferencia de escalones unitarios que constituyen la ventana de tiempo, como en la construcción de la Figura 1.5. Usando la conocida fórmula de los dos puntos que se enseña en geometría analítica, la ecuación de la recta $f_r(t)$ es

$$f_r(t) = \frac{10}{3}t + \frac{4}{3}. \tag{1.3}$$

Por lo tanto, la expresión para el segundo tramo nos queda

$$f_2(t) = \left(\frac{10}{3}t + \frac{4}{3}\right)\left(u(t+1) - u(t-1/2)\right). \tag{1.4}$$

El tercer tramo es otra línea recta, solo que esta vez es una línea recta horizontal. Llevando a cabo un procedimiento similar al del segundo tramo encontramos que

$$f_3(t) = 2\left(u(t-1/2) - u(t-1)\right). \tag{1.5}$$

Adicionalmente, el cuarto tramo puede expresarse mediante

$$f_4(t) = 2e^{-(t-1)}u(t-1). \tag{1.6}$$

Finalmente, la solución al problema planteado está dada por

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + f_4(t), \tag{1.7}$$

o en forma explícita

$$\begin{aligned} f(t) = {} & -2e^{t+1}u(-t-1) + \left(\frac{10}{3}t + \frac{4}{3}\right)\left(u(t+1) - u(t-1/2)\right) + \\ & +2\left(u(t-1/2) - u(t-1)\right) + 2e^{-(t-1)}u(t-1). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Problema 2. Los polinomios de Legendre forman una base de funciones ortogonales en el intervalo $-1 < t < 1$. Estos polinomios pueden encontrarse usando la fórmula de Rodrigues la cual establece que

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n] \tag{2.1}$$

donde $P_n(t)$ es el n-ésimo polinomio de Legendre y tiene grado n .

a) Escriba explícitamente los primeros 4 polinomios de Legendre $(n = 0,1,2,3)$.
b) Muestre que estos polinomios son ortogonales.
c) La ecuación diferencial de Legendre, cuyas soluciones algebraicas son precisamente los polinomios ortogonales de Legendre, es la siguiente:

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{d}{dt}[P_n(t)]\right] + n(n+1)P_n(t) = 0. \tag{2.2}$$

Verificar que los polinomios de Legendre de a) satisfacen la ecuación.

Solución: **Inciso a)** Evaluando las derivadas indicadas en (2.1) para valores crecientes de n obtenemos:

$$P_0(t) = \frac{1}{2^0 0!}(t^2-1)^0 = 1 \tag{2.3}$$

$$P_1(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[(t^2-1)] = \frac{1}{2}[2t] = t \tag{2.4}$$

$$P_2(t) = \frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dt^2}[(t^2-1)^2] = \frac{1}{8}\frac{d^2}{dt^2}[t^4-2t^2+1] =$$

$$= \frac{1}{8}\frac{d}{dt}[4t^3-4t] = \frac{1}{8}[12t^2-4] = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \tag{2.5}$$

$$P_3(t) = \frac{1}{2^3 3!}\frac{d^3}{dt^3}[(t^2-1)^3] = \frac{1}{48}\frac{d^3}{dt^3}[t^6-3t^4+3t^2-1] =$$

$$= \frac{1}{48}\frac{d^2}{dt^2}[6t^5-12t^3+6t] = \frac{1}{48}\frac{d}{dt}[30t^4-36t^2+6] =$$

$$= \frac{1}{48}[120t^3-72t] = \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t \tag{2.6}$$

Inciso b) Para que dos funciones sean ortogonales en un intervalo se requiere que su producto interno se anule, es decir, se debe cumplir

$$\int_a^b f_1(t) f_2(t) dt = 0. \tag{2.7}$$

En el caso de los polinomios de Legendre, $f_1(t) = P_n(t)$, $f_2(t) = P_m(t)$ con n y m índices distintos. Además, en este caso $a = -1$ y $b = 1$. Así, para resolver el inciso b), necesitamos verificar que las siguientes integrales sean todas nulas:

$$I_1 = \int_{-1}^{1} P_0(t) P_1(t) dt = 0 \tag{2.8}$$

$$I_2 = \int_{-1}^{1} P_0(t) P_2(t) dt = 0 \tag{2.9}$$

$$I_3 = \int_{-1}^{1} P_0(t) P_3(t) dt = 0 \tag{2.10}$$

$$I_4 = \int_{-1}^{1} P_1(t) P_2(t) dt = 0 \tag{2.11}$$

$$I_5 = \int_{-1}^{1} P_1(t) P_3(t) dt = 0 \tag{2.12}$$

$$I_6 = \int_{-1}^{1} P_2(t) P_3(t) dt = 0 \tag{2.13}$$

Evaluando las integrales una por una encontramos que

$$I_1 = \int_{-1}^{1} t dt = \frac{t^2}{2}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \tag{2.14}$$

$$I_2 = \int_{-1}^{1} \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right) dt = \frac{1}{2}t^3\bigg|_{-1}^{1} - \frac{1}{2}t\bigg|_{-1}^{1} = 0 \tag{2.15}$$

$$I_3 = \int_{-1}^{1} \left(\frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t\right) dt = \frac{5}{8}t^4\bigg|_{-1}^{1} - \frac{3}{4}t^2\bigg|_{-1}^{1} = 0 \tag{2.16}$$

$$I_4 = \int_{-1}^{1} \left(\frac{3}{2}t^3 - \frac{1}{2}t\right) dt = \frac{3}{8}t^4\bigg|_{-1}^{1} - \frac{1}{4}t^2\bigg|_{-1}^{1} = 0 \tag{2.17}$$

$$I_5 = \int_{-1}^{1} \left(\frac{5}{2}t^4 - \frac{3}{2}t^2\right) dt = \frac{1}{2}t^5\bigg|_{-1}^{1} - \frac{1}{2}t^3\bigg|_{-1}^{1} = 0 \tag{2.18}$$

$$I_6 = \int_{-1}^{1} \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t\right) dt = \int_{-1}^{1} \left(\frac{15}{4}t^5 - \frac{14}{4}t^3 + \frac{3}{4}t\right) =$$

$$= \frac{15}{24}t^6\bigg|_{-1}^{1} - \frac{14}{16}t^4\bigg|_{-1}^{1} + \frac{3}{8}t^2\bigg|_{-1}^{1} = 0 \tag{2.19}$$

lo que verifica lo que deseábamos.

Inciso c) Para $n = 0$, tenemos

$$\frac{d}{dt}[(1-t^2)P_0'(t)] = (1-t^2)P_0''(t) - 2tP_0'(t) = 0\,, \tag{2.20}$$

puesto que $P_0(t) = 1$, y por lo tanto $P_0'(t) = P_0''(t) = 0$.

Para $n = 1$, tenemos

$$\frac{d}{dt}[(1-t^2)P_1'(t)] + 2P_1(t) = (1-t^2)P_1''(t) - 2tP_1'(t) + 2P_1(t)\,. \tag{2.21}$$

Pero $P_1(t) = t$, entonces haciendo la sustitución en la ecuación anterior llegamos a

$$(1-t^2)(0) - 2t(1) + 2(t) = -2t + 2t = 0\,, \tag{2.22}$$

por lo tanto $P_1(t)$ cumple con la ecuación diferencial.

Para $n = 2$, tenemos

$$\frac{d}{dt}[(1-t^2)P_2'(t)] + 6P_2(t) = (1-t^2)P_2''(t) - 2tP_2'(t) + 6P_2(t). \tag{2.23}$$

Pero $P_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}$, entonces haciendo la sustitución en la ecuación anterior llegamos a

$$(1-t^2)(3) - 2t(3t) + 6\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right) = 3 - 3t^2 - 6t^2 + 9t^2 - 3 = 0\,, \tag{2.24}$$

por lo tanto $P_2(t)$ también cumple con la ecuación diferencial.

Para $n = 3$, tenemos

$$\frac{d}{dt}[(1-t^2)P_3'(t)] + 12P_2(t) = (1-t^2)P_3''(t) - 2tP_3'(t) + 12P_3(t). \tag{2.25}$$

Pero $P_3(t) = \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t$, entonces haciendo la sustitución en la ecuación anterior llegamos a

$$(1-t^2)(15t) - 2t\left(\frac{15}{2}t^2 - \frac{3}{2}\right) + 12\left(\frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t\right) = 15t - 15t^3 - 15t^3 + 3t + 30t^3 - 18t = 0\,, \tag{2.26}$$

por lo tanto $P_3(t)$ también cumple con la ecuación diferencial.

Problema 3. Encuentre la expansión en polinomios de Legendre de la función $f(t) = 1 + 2t + 3t^2 + 4t^3$ en el intervalo $-1 < t < 1$.

Solución: Realizar una expansión respecto a una base de funciones significa expresar la función como una suma pesada de las funciones de la base. En el caso que nos ocupa, se nos pide expresar $f(t)$ como

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(t) \tag{3.1}$$

donde c_n es la constante que determina el peso del polinomio de Legendre $P_n(t)$ en la expansión.

Método 1. Como la función es un polinomio de grado 3, requerimos solamente los primeros 4 $(n = 0,1,2,3)$ polinomios de Legendre para conseguir una expansión sin error. La forma directa de encontrar los coeficientes requeridos (c_0, c_1, c_2, c_3) es la siguiente. Definamos la función $g(t)$ como

$$g(t) = \sum_{n=0}^{3} c_n P_n(t). \tag{3.2}$$

Ahora, tomando en cuenta que $P_0(t) = 1, P_1(t) = t, P_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}, P_3(t) = \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t$, $g(t)$ puede escribirse como

$$g(t) = \left(c_0 - \frac{1}{2}c_2\right) + \left(c_1 - \frac{1}{2}c_3\right)t + \frac{3}{2}c_2 t^2 + \frac{5}{2}c_3 t^3. \tag{3.3}$$

Pero, de acuerdo con (3.1), deseamos que $f(t) = g(t)$. Como ambos son polinomios del mismo grado, la igualdad implica que lo coeficientes de las distintas potencias deben ser iguales. Esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$c_0 - \frac{1}{2}c_2 = 1; c_1 - \frac{3}{2}c_3 = 2; \frac{3}{2}c_2 = 3; \frac{5}{2}c_3 = 4, \tag{3.4}$$

que se puede expresar matricialmente mediante

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

La solución al sistema anterior es

$$c_0 = 2;\ c_1 = \frac{22}{5};\ c_2 = 2;\ c_3 = \frac{8}{5}; \tag{3.6}$$

por lo tanto, la expansión deseada es

$$f(t) = 2P_0(t) + \frac{22}{5}P_1(t) + 2P_2(t) + \frac{8}{5}P_3(t). \tag{3.7}$$

Es importante hacer notar que en este caso tuvimos que resolver un sistema lineal de 4 ecuaciones con 4 incógnitas. Si $f(t)$ hubiera tenido grado q, el sistema resultante sería de q ecuaciones con q incógnitas. La solución de este tipo de sistemas tiene una complejidad computacional proporcional a q^3. Para q grande, la complejidad computacional puede llegar a ser prohibitiva, por lo que requerimos un método más eficiente. Como los polinomios de Legendre son ortogonales, este método existe y se presenta a continuación.

Método 2. Los polinomios de Legendre satisfacen la siguiente relación de ortogonalidad

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)dt = \begin{cases} 0 \; ; & para\; m \neq n \\ \frac{2}{2m+1} \; ; & para\; m = n \end{cases} \tag{3.8}$$

Entonces es posible realizar el siguiente procedimiento. Comenzando con (3.1), primero multiplicamos por $P_m(t)$ para obtener

$$f(t)P_m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(t)P_m(t). \tag{3.9}$$

Realizando ahora la integración en el intervalo $-1 < t < 1$ llegamos a

$$\int_{-1}^{1} f(t)P_m(t)dt = \int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(t)P_m(t)dt. \tag{3.10}$$

Como se supone que la sumatoria converge, es posible intercambiar el orden de la suma y la integración en el lado derecho de la ecuación (3.9), así

$$\int_{-1}^{1} f(t)P_m(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)dt. \tag{3.11}$$

Aplicando finalmente la relación (3.7) obtenemos

$$\frac{2}{2m+1} c_m = \int_{-1}^{1} f(t)P_m(t)dt, \tag{3.12}$$

por lo que

$$c_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{1} f(t)P_m(t)dt. \tag{3.13}$$

Nótese que ahora cada coeficiente se evalúa por separado en lugar de llevar a cabo la resolución simultánea de un sistema de ecuaciones lineales como en el método anterior. De esta forma la complejidad computacional es proporcional al número de coeficientes en lugar de ser proporcional a su cubo como en el método anterior. Para el problema que nos ocupa, la evaluación de los coeficientes es como sigue

$$c_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (1 + 2t + 3t^2 + 4t^3)dt \tag{3.14}$$

$$c_0 = \frac{1}{2} \left[t|_{-1}^{1} + t^2|_{-1}^{1} + t^3|_{-1}^{1} + t^4|_{-1}^{1} \right] = 2 \tag{3.15}$$

$$c_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} (1 + 2t + 3t^2 + 4t^3)tdt \tag{3.16}$$

$$c_1 = \frac{3}{2}\left[\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} + \frac{2}{3}t^3\Big|_{-1}^{1} + \frac{3}{4}t^4\Big|_{-1}^{1} + \frac{4}{5}t^5\Big|_{-1}^{1}\right] = \frac{3}{2}\left[\frac{4}{3} + \frac{8}{5}\right] = \frac{22}{5} \tag{3.17}$$

$$c_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}(1 + 2t + 3t^2 + 4t^3)\left(\frac{3}{2}t - \frac{1}{2}\right)dt \tag{3.18}$$

$$c_2 = \frac{5}{2}\left[-\frac{t}{2}\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{2}t^2\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{4}t^4\Big|_{-1}^{1} + \frac{9}{10}t^5\Big|_{-1}^{1} + t^6\big|_{-1}^{1}\right] = \frac{5}{2}\left[-1 + \frac{18}{10}\right] = 2 \tag{3.19}$$

$$c_3 = \frac{7}{2}\int_{-1}^{1}(1 + 2t + 3t^2 + 4t^3)\left(\frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t\right)dt \tag{3.20}$$

$$c_3 = \frac{7}{2}\left[-\frac{3}{4}t^2\Big|_{-1}^{1} - t^3\big|_{-1}^{1} - \frac{1}{2}t^4\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{5}t^5\Big|_{-1}^{1} + \frac{15}{12}t^6\big|_{-1}^{1} + \frac{10}{7}t^7\big|_{-1}^{1}\right] = \frac{7}{2}\left[-2 - \frac{2}{5} + \frac{20}{7}\right] = \frac{8}{5} \tag{3.21}$$

Y finalmente

$$f(t) = 2P_0(t) + \frac{22}{5}P_1(t) + 2P_2(t) + \frac{8}{5}P_3(t), \tag{3.22}$$

que coincide con el resultado encontrado por el método 1 como se esperaba.

Problema 4. Si una señal periódica satisface ciertas condiciones de simetría, la evaluación de los coeficientes de Fourier se simplifica. Demuestre que lo siguiente es verdadero:

a) Si $g(t) = g(-t)$ (simetría par), entonces todos los términos senoidales de la serie trigonométrica de Fourier se anulan.
b) Si $g(t) = -g(-t)$ (simetría impar), entonces todos los términos cosenoidales de la serie trigonométrica de Fourier se anulan.
c) Si $g(t) = -g(t \pm T/2)$ (simetría de rotación, T es el período), entonces todas las armónicas de tipo par se anulan.

Solución: Tenemos que la señal es periódica, esto es, sabemos que $g(t) = g(t + T)$. La serie trigonométrica de Fourier de una señal periódica está dada por

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n cos(n\omega t) + b_n sen(n\omega t)\right) \tag{4.1}$$

donde $\omega = 2\pi/T$ es la frecuencia fundamental. Los coeficientes de la serie se pueden calcular mediante las fórmulas siguientes:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt \tag{4.2}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)\,dt \qquad ; \qquad n = 1,2,3,\ldots \tag{4.3}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\text{sen}(n\omega t)\,dt \qquad ; \qquad n = 1,2,3,\ldots \tag{4.4}$$

Inciso a) En este caso hay que verificar que los términos senoidales se anulan. A partir de la ecuación (4.1) vemos que esto es equivalente a que los coeficientes $b_n = 0\ \forall n$. Usando (4.4) y partiendo la integral en dos partes obtenemos

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)\,\text{sen}(n\omega t)\,dt + \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\text{sen}(n\omega t)\,dt. \tag{4.5}$$

Haciendo el cambio de variable $t = -x$ en la primera integral, tenemos que $dt = -dx$, también si $t = -T/2$ entonces $x = T/2$ y si $t = 0$ entonces $x = 0$. Además $sen(n\omega t) = sen(n\omega(-x)) = -sen(n\omega x)$, así

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{0} f(-x)(-\,\text{sen}(n\omega x))(-dx) + \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\text{sen}(n\omega t)\,dt \tag{4.6}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{0} f(-x)\,\text{sen}(n\omega x)dx + \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\text{sen}(n\omega t)\,dt \tag{4.7}$$

$$b_n = -\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(-x)\,\text{sen}(n\omega x))dx + \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\text{sen}(n\omega t)\,dt \tag{4.8}$$

pero $f(-x) = f(x)$, entonces

$$b_n = -\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(x)\,\text{sen}(n\omega x))dx + \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\text{sen}(n\omega t)dt = 0 \tag{4.9}$$

que es lo que deseábamos demostrar.

Inciso b) El desarrollo es similar al del inciso a) pero usando ahora la ecuación (4.3).

Inciso c) En este caso debemos demostrar que las armónicas pares se anulan, es decir, los coeficientes $a_0, a_2, a_4 \ldots$ y $b_2, b_4, b_6 \ldots$ deben ser igual a cero. Comencemos por evaluar el coeficiente a_0. Usando (4.2) y partiendo la integral en dos partes tenemos

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)dt + \frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)dt. \tag{4.10}$$

Haciendo el cambio de variable $t = x - \frac{T}{2}$ en la primera integral, tenemos que $dt = dx$, también si $t = -T/2$ entonces $x = 0$ y si $t = 0$ entonces $x = T/2$, así

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f\left(x - \frac{T}{2}\right)dx + \frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)dt, \tag{4.11}$$

pero $f\left(x-\frac{T}{2}\right)=-f(x)$, entonces

$$a_0=-\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(x)\,dx+\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(t)dt=0. \tag{4.12}$$

El caso $f(x)=-f(x+\frac{T}{2})$ se trata de forma similar. Procedamos a evaluar a_n $(n>0)$. A partir de (4.3) tenemos

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}f(t)\cos(n\omega t)\,dt+\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\omega t)\,dt. \tag{4.13}$$

Haciendo el cambio de variable $t=x-\frac{T}{2}$ en la primera integral, tenemos que $dt=dx$, también si $t=-T/2$ entonces $x=0$y si $t=0$ entonces $x=\frac{T}{2}$. Además $cos(n\omega t)=cos\left(n\omega(x-\frac{T}{2})\right)=cos(n\omega x-n\pi)$, así

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f\left(x-\frac{T}{2}\right)\cos(n\omega x-n\pi)\,dx+\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\omega t)\,dt \tag{4.14}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}-f(x)(-1)^n\cos(n\omega x)\,dx+\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\omega t)\,dt \tag{4.15}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}[1-(-1)^n]f(t)\cos(n\omega t)\,dt=\begin{cases}0 & ;\quad n\ par\\ \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\omega t)dt & ;\quad n\ impar\end{cases} \tag{4.16}$$

La determinación de los coeficientes b_n se hace de forma similar, así como el caso $f(x)=-f(x+\frac{T}{2})$. De esta forma se verifica que todas las armónicas pares se anulan.

Problema 5. Encontrar la serie trigonométrica de Fourier de la función periódica $(T=2)$, que se muestra en la Figura 5.1.

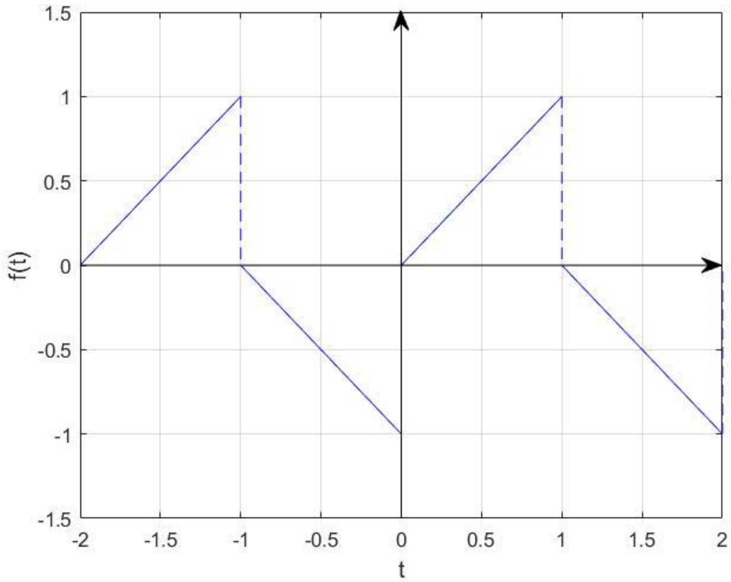

Figura 5.1. Señal periódica con simetría de rotación (se muestran solo 2 periodos)

Solución: La expresión matemática para $f(t)$ es

$$f(t) = \begin{cases} -t-1 & ; \quad -1 \le t < 0 \\ t & ; \quad 0 \le t < 1 \\ & f(t) = f(t+2) \end{cases} \tag{5.1}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier se evalúan como sigue:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(-t-1)dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} tdt = -\frac{t^2}{4}\bigg|_{-1}^{0} - \frac{t}{2}\bigg|_{-1}^{0} + \frac{t^2}{4}\bigg|_{0}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0 \tag{5.2}$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(t)\cos(n\pi t)\,dt = \int_{-1}^{0}(-t-1)\cos(n\pi t)\,dt + \int_{0}^{1} tcos(n\pi t)dt \tag{5.3}$$

$$a_n = \int_{-1}^{0} -tcos(n\pi t)dt - \int_{-1}^{0}\cos(n\pi t)\,dt + \int_{0}^{1} tcos(n\pi t)dt \tag{5.4}$$

$$a_n = 2\int_{0}^{1} tcos(n\pi t)dt - \int_{0}^{1}\cos(n\pi t)\,dt \tag{5.5}$$

$$a_n = \frac{2tsen(n\pi t)}{n\pi}\bigg|_{0}^{1} + \frac{2cos(n\pi t)}{n^2\pi^2}\bigg|_{0}^{1} - \frac{sen(n\pi t)}{n\pi}\bigg|_{0}^{1} \tag{5.6}$$

$$a_n = \frac{2(\cos(n\pi) - \cos(0))}{n^2\pi^2} = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} = \begin{cases} 0 & ; \quad n\ par \\ \frac{-4}{n^2\pi^2} & ; \quad n\ impar \end{cases} \tag{5.7}$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{sen}(n\pi t)\,dt = \int_{-1}^{0}(-t-1)\,\mathrm{sen}(n\pi t)\,dt + \int_{0}^{1} t\,sen(n\pi t)dt \tag{5.8}$$

$$b_n = \int_{-1}^{0} -t\,sen(n\pi t)dt - \int_{-1}^{0}\mathrm{sen}(n\pi t)\,dt + \int_{0}^{1} t\,sen(n\pi t)dt \tag{5.9}$$

$$b_n = \int_{0}^{1} sen(n\pi t)dt = -\left.\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\right|_{0}^{1} = \frac{1-(-1)^n}{n\pi} = \begin{cases} 0 \;\; ; & n\,par \\ \frac{2}{n\pi} \;\; ; & n\,impar \end{cases} \tag{5.10}$$

Así la representación de la función en serie trigonométrica de Fourier es

$$f(t) = \sum_{n\,impar}\frac{2}{n\pi} sen(n\pi t) - \sum_{n\,impar}\frac{4}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t). \tag{5.11}$$

Note que las armónicas pares de la función no existen. Esto se debe a que la función posee simetría rotacional y estas armónicas se anulan de acuerdo con el resultado del inciso c) del problema 4.

Problema 6. Verifique si la señal $f(t) = \cos(4t) + sen(7t)$ es periódica. Si es así, encuentre su período.

Solución: La señal está formada por una suma de señales periódicas. Para que sea periódica, debe existir un periodo común a cada uno de los sumandos. Una señal senoidal puede escribirse de forma general como $Asen\left(\frac{2\pi}{T}t+\theta\right)$ donde A es la amplitud, T su periodo y θ su fase. El primer sumando, $cos(4t)$, tiene como parámetros $A = 1, T = \frac{\pi}{2}, \theta = -\frac{\pi}{2}$; mientras que el segundo, $sin(7t)$, tiene como parámetros $A = 1, T = \frac{2\pi}{7}, \theta = 0$. El periodo fundamental T_f de la señal $f(t)$ debe ser entonces igual al mínimo común múltiplo de los periodos de los sumandos, es decir, debe poder expresarse como $T_f = n\frac{\pi}{2} = m\frac{2\pi}{7}$, para valores enteros positivos de n, m. La solución existe y los enteros positivos más pequeños que cumplen con la relación anterior son $n = 4, m = 7$. Por esta razón la señal $f(t)$ si es periódica y su periodo fundamental es $T_f = 2\pi$.

Problema 7. Encuentre la respuesta del circuito de la Figura 7.1 a la señal de entrada que se muestra en la Figura 7.2. El capacitor se encuentra inicialmente (en $t = 0$) descargado, a) Resolviendo la ecuación diferencial que describe el sistema y b) Evaluando la respuesta al impulso del circuito y empleando la integral de convolución.

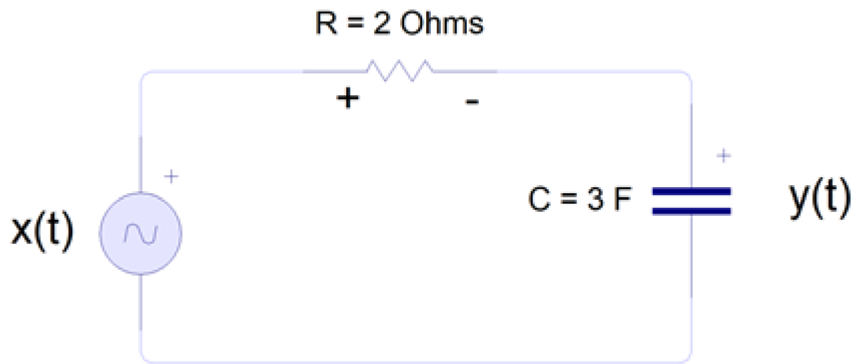

Figura 7.1. Circuito bajo estudio.

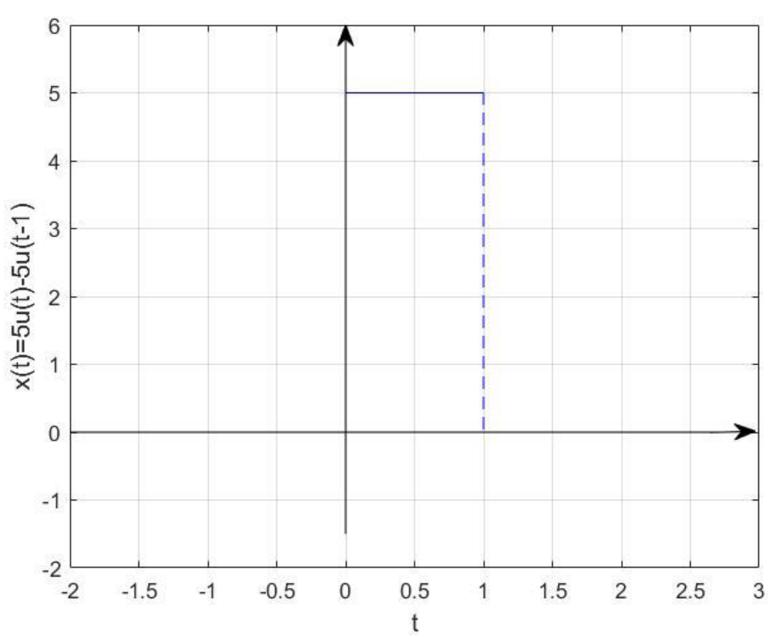

Figura 7.2. Señal de entrada $x(t)$, tiempo en segundos, amplitud en Voltios.

Inciso a) La ecuación diferencial que relaciona la señal de salida con la de entrada se obtiene aplicando las leyes de Kirchhoff en conjunto con las relaciones voltaje-corriente de los componentes del circuito. Denotemos por $v_R(t)$ y $v_C(t)$ los voltajes existentes en la resistencia y el capacitor, con la polaridad mostrada en la Figura 7.1. Sea $i(t)$ la corriente común que circula a través de la resistencia y del capacitor, entonces se tienen las siguientes relaciones

$$v_R(t) = Ri(t) = 2i(t), \tag{7.1}$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt = \frac{1}{3}\int i(t)dt. \tag{7.2}$$

La ecuación (7.1) es la relación existente entre el voltaje y la corriente en una resistencia mientras que la ecuación (7.2) es aquella que se cumple en un capacitor. Por otra parte, empleando la ley de voltajes de Kirchhoff tenemos

$$x(t) = v_R(t) + v_C(t), \tag{7.3}$$

$$x(t) = Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt. \tag{7.4}$$

Adicionalmente, el voltaje de salida $y(t)$ es igual al voltaje del capacitor

$$y(t) = v_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt, \tag{7.5}$$

por lo que se verifica que

$$i(t) = C\frac{dy(t)}{dt}. \tag{7.6}$$

Sustituyendo (7.6) en (7.4) obtenemos finalmente la ecuación diferencial que relaciona la señal de salida con la señal de entrada

$$RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t). \tag{7.7}$$

Pero $R = 2\Omega$ y $C = 3F$, por lo que la ecuación diferencial del circuito de la Figura 7.1 es

$$6\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t). \tag{7.8}$$

a.1.- Solución de la ecuación diferencial empleando el método de los coeficientes indeterminados

En el método de los coeficientes indeterminados la solución de la ecuación diferencial se expresa mediante la suma de dos términos, ellos son la respuesta homogénea o natural y la respuesta particular o forzada. Así

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t), \tag{7.9}$$

donde $y_h(t)$ es la solución homogénea y $y_p(t)$ la solución particular. La solución particular depende de la señal de entrada y se calcula primero. Como la señal de entrada es continua por tramos, es necesario analizar cada tramo por separado. En el intervalo $0 < t < 1$ la señal de entrada es constante por lo que la solución particular es

$$y_p(t) = d, \tag{7.10}$$

donde d es una constante por determinar. Para encontrar d, es necesario sustituir $y_p(t)$ por $y(t)$ en la ecuación (7.8), así llegamos a

$$6(0) + d = 5 \quad ; \quad 0 < t < 1, \tag{7.11}$$

de donde obtenemos

$$d = 5 \quad ; \quad 0 < t < 1. \tag{7.12}$$

Por otra parte, la solución homogénea se obtiene mediante la ecuación característica asociada a la ecuación diferencial. En este caso la ecuación característica es

$$6D + 1 = 0, \tag{7.13}$$

cuya única raíz (puesto que la ecuación es de primer grado) es $D = -\frac{1}{6}$. Así, la solución homogénea es

$$y_h(t) = c_1 e^{-\frac{t}{6}} \quad ; \quad 0 < t < 1, \tag{7.14}$$

donde c_1 es otra constante por determinar. Para hacerlo, escribimos la solución completa de la ecuación diferencial y utilizamos la condición inicial, es decir

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{-\frac{t}{6}} + 5 \quad ; \quad 0 < t < 1. \tag{7.15}$$

En $t = 0$ el capacitor está descargado, es decir, $y(0) = 0$. Usando esta condición en (7.15) encontramos

$$y(0) = c_1 e^{-\frac{0}{6}} + 5 = c_1 + 5 = 0, \tag{7.16}$$

de donde $c_1 = -5$ y finalmente

$$y(t) = 5\left(1 - e^{-\frac{t}{6}}\right) \quad ; \quad 0 < t < 1. \tag{7.17}$$

Analicemos ahora el intervalo $t > 1$. En este intervalo la señal de entrada es nula por lo que la solución particular de la ecuación es también nula. Por otra parte, la solución homogénea es ahora

$$y(t) = y_h(t) = c_2 e^{-\frac{t-1}{6}} \quad ; \quad t > 1, \tag{7.18}$$

donde c_2 es una nueva constante por determinar. De la ecuación (7.17) sabemos que $y(1) = 5\left(1 - e^{-\frac{1}{6}}\right) \approx 0.7676$ (que es el voltaje que posee el capacitor cuando la señal de entrada cambia de 5 a 0 Voltios en $t = 1$), usando este valor en (7.18) obtenemos

$$y(1) = c_2 = 0.7676, \tag{7.19}$$

por lo que

$$y(t) = 0.7676e^{-\frac{t-1}{6}} \quad ; \quad t > 1. \tag{7.20}$$

Combinando ambos intervalos finalmente obtenemos

$$y(t) = 5\left(1 - e^{-\frac{t}{6}}\right)(u(t) - u(t-1)) + 0.7676e^{-\frac{t-1}{6}}u(t-1), \tag{7.21}$$

donde $u(t)$ es la función escalón unitario. La Figura 7.3 muestra la señal de salida.

a.2.- Solución de la ecuación diferencial empleando el método de la transformada de Laplace

La transformada de Laplace se puede emplear para resolver la ecuación (7.8) de la siguiente manera. Sea $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ la transformada de Laplace de la señal de salida $y(t)$. Aplicando el operador de Laplace a la ecuación (7.8) obtenemos

$$\mathcal{L}\left\{6\frac{dy(t)}{dt} + y(t)\right\} = \mathcal{L}\{x(t)\}. \tag{7.22}$$

Por la propiedad de linealidad de la transformada llegamos a

$$6\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{x(t)\}. \tag{7.23}$$

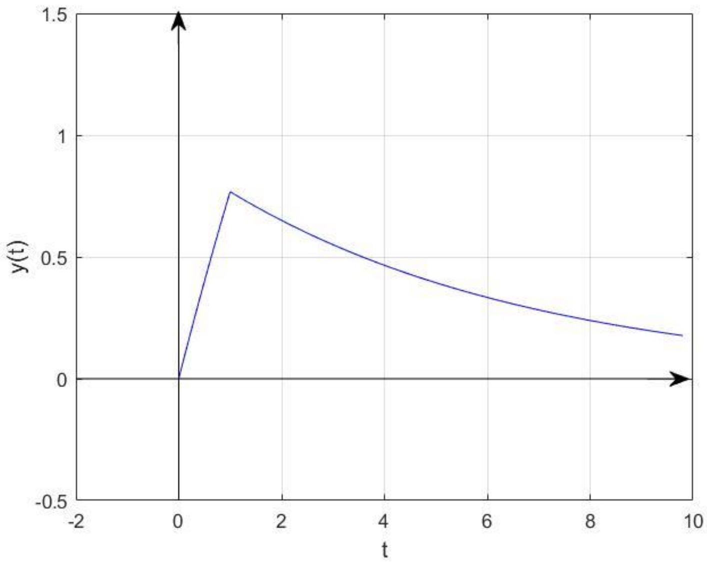

Figura 7.3. Señal de salida, tiempo en segundos, amplitud en Voltios.

Ahora, aplicando la propiedad para la transformada de una derivada y haciendo $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ obtenemos

$$6sY(s) - y(0) + Y(s) = X(s). \tag{7.24}$$

La señal de entrada $x(t)$ se puede expresar mediante funciones escalón unitario como

$$x(t) = 5(u(t) - u(t-1)), \tag{7.25}$$

y entonces

$$X(s) = 5\mathcal{L}\{u(t)\} - 5\mathcal{L}\{u(t-1)\}. \tag{7.26}$$

La transformada del escalón unitario es $\mathcal{L}\{u(t)\} = s^{-1}$ y la del escalón unitario retardado es $\mathcal{L}\{u(t-1)\} = s^{-1}e^{-s}$, así

$$X(s) = 5\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}\right) = \frac{5(1-e^{-s})}{s}. \tag{7.27}$$

Sustituyendo en (7.24) y notando que $y(0) = 0$ (pues el capacitor está inicialmente descargado) obtenemos después de algunos pasos algebraicos

$$Y(s) = \frac{5(1-e^{-s})}{s(6s+1)}. \tag{7.28}$$

Usando expansión en fracciones parciales la transformada también puede escribirse como

$$Y(s) = \frac{5(1-e^{-s})}{s} - \frac{30(1-e^{-s})}{6s+1} = \frac{5(1-e^{-s})}{s} - \frac{5(1-e^{-s})}{s+\frac{1}{6}}. \tag{7.29}$$

La transformada inversa de $Y(s)$ es

$$y(t) = 5(u(t) - u(t-1)) - 5e^{-\frac{t}{6}}u(t) + 5e^{-\frac{t-1}{6}}u(t-1), \tag{7.30}$$

que después de reacomodarse es igual a

$$y(t) = 5\left(1 - e^{-\frac{t}{6}}\right)(u(t) - u(t-1)) + 0.7676e^{-\frac{t-1}{6}}u(t-1). \tag{7.31}$$

La ecuación (7.31) es idéntica a la ecuación (7.21) como se esperaba.

Inciso b) En este caso comenzaremos por calcular la respuesta al impulso $h(t)$ del circuito, la cual se encuentra resolviendo la ecuación diferencial cuando la entrada es igual a la función delta de Dirac, esto es, $x(t) = \delta(t)$. A partir de (7.8) y tomando en cuenta lo anterior la ecuación diferencial que debemos resolver es

$$6\frac{dh(t)}{dt} + h(t) = \delta(t). \tag{7.32}$$

Empleando nuevamente la transformada de Laplace tenemos

$$6sH(s) + H(s) = 1, \tag{7.33}$$

donde $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$ es la función de transferencia del circuito. A partir de (7.33) $H(s)$ es igual a

$$H(s) = \frac{1}{6s+1} = \frac{\frac{1}{6}}{s+\frac{1}{6}}, \tag{7.34}$$

de donde la respuesta al impulso es entonces

$$h(t) = \frac{1}{6}e^{-\frac{t}{6}}u(t). \tag{7.35}$$

Una vez conociendo la respuesta al impulso, la señal de salida puede calcularse mediante la convolución de la señal de entrada con la respuesta al impulso del circuito, esto es

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau. \tag{7.36}$$

Sustituyendo las expresiones para la señal de entrada en (7.25) y para la respuesta al impulso en (7.35) llegamos a

$$y(t) = \frac{5}{6}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau}{6}} u(\tau)(u(t-\tau) - u(t-\tau-1))d\tau. \tag{7.37}$$

La función $u(\tau)(u(t-\tau) - u(t-\tau-1))$ corresponde a una ventana en el tiempo en el eje τ que se extiende desde el máximo entre 0 y $t-1$ hasta el máximo entre 0 y t. Así, la integral en (7.37) se reduce a

$$y(t) = \frac{5}{6}\int_{\max(0,t-1)}^{\max(0,t)} e^{-\frac{\tau}{6}} d\tau. \tag{7.38}$$

Tenemos tres casos. Cuando $t < 0$

$$y(t) = \frac{5}{6}\int_{0}^{0} e^{-\frac{\tau}{6}} d\tau = 0. \tag{7.39}$$

Por otra parte, para $0 \leq t < 1$

$$y(t) = \frac{5}{6}\int_{0}^{t} e^{-\frac{\tau}{6}} d\tau = -5e^{-\frac{\tau}{6}}\Big|_{0}^{t} = 5\left(1 - e^{-\frac{t}{6}}\right). \tag{7.40}$$

Finalmente, para $t > 1$

$$y(t) = \frac{5}{6}\int_{t-1}^{t} e^{-\frac{\tau}{6}} d\tau = -5e^{-\frac{\tau}{6}}\Big|_{t-1}^{t} = 5\left(e^{-\frac{t-1}{6}} - e^{-\frac{t}{6}}\right) = 0.7676e^{-\frac{t-1}{6}}. \tag{7.41}$$

Juntando los resultados en (7.39), (7.40) y (7.41) llegamos a

$$y(t) = 5\left(1 - e^{-\frac{t}{6}}\right)(u(t) - u(t-1)) + 0.7676e^{-\frac{t-1}{6}} u(t-1). \tag{7.42}$$

Note que la señal de salida obtenida por este método concuerda con la de aquellos empleados en el inciso a).